Problem des Monats Oktober · 2020

Zu Aufgabe 1 und 2

Form der Schnittfläche	Art des Schnittes	Kartoffelbild
Quadrat	Wenn vier Ecken abgeschnitten werden. Der Schnitt ist parallel zu einer Würfelfläche. Es werden dabei immer vier Kanten, bzw. Flächen durchschnitten, und es sind immer je zwei Schnittkanten parallel zueinander.	
Rechteck	Wenn zwei oder vier Ecken abgeschnitten werden. Der Schnitt ist nicht parallel zu einer Würfelseite, aber orthogonal zu einer Würfelseite. Es werden dabei immer vier Kanten, bzw. Flächen durchschnitten, und es sind immer je zwei Schnittkanten parallel zueinander.	
Trapez	Wenn zwei Ecken abgeschnitten werden. Der Schnitt ist weder parallel noch orthogonal zu einer Würfelseite. Es werden dabei auch vier Kanten, bzw. Flächen durchschnitten, aber von den Schnittkanten sind nur zwei parallel zueinander.	
Dreieck	Wenn eine Ecken abgeschnitten wird. Der Schnitt ist weder parallel noch orthogonal zu einer Würfelseite. Es werden also nur drei Kanten, bzw. Flächen durchschnitten, die Schnittkanten sind nicht parallel zueinander.	
Fünfeck	Wenn drei Ecken abgeschnitten werden. Der Schnitt ist nicht parallel zu einer Würfelseite, aber orthogonal zu einer Würfelseite. Es werden dabei fünf Kanten, bzw. Flächen durchschnitten.	
Sechseck	Wenn vier Ecken abgeschnitten werden. Der Schnitt ist weder parallel noch orthogonal zu einer Würfelseite. Es werden dabei sechs Kanten, bzw. Flächen durchschnitten.	

Liegt die Schnittebene senkrecht zu einer Raumdiagonalen des Würfels, so gibt es zwei Möglichkeiten für gleichseitige, also regelmäßige Figuren:
1.) Geht die Ebene durch den Mittelpunkt der Raumdiagonalen, so entsteht ein regelmäßiges Sechseck.
2.) Geht die Ebene durch das untere oder obere Drittel der Raumdiagonalen, so entsteht ein regelmäßiges Dreieck.
Geht die Ebene senkrecht durch das mittlere Drittel ungleich Mitte der Raumdiagonalen entsteht ein Sechseck mit drei gleichlangen kürzeren und drei gleichlangen längeren Seiten, die sich in der Reihenfolge abwechseln. Somit liegt dann keine gleichseitige Figur vor.
Liegt die Schnittebene parallel zu einer der Seitenflächen, so entsteht ein Quadrat.
In allen anderen Fällen ist die Schnittfläche unregelmäßig. (Fallunterscheidung ist hier leider recht unübersichtlich und unschön.)

Petra Presun, Alexander Schöning · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

Zu Aufgabe 3

Rekursive Herleitung

Neben der Herangehensweise der analytischen Geometrie kann man einen Hyperwürfel auch rekursiv aus den niedrigeren Dimensionen folgern. Dazu betrachtet man Verschiebungen in die jeweils höhere Dimension:

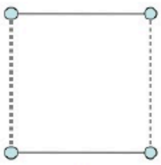
1. Wenn man den Punkt (Dimension Null) in eine beliebige Richtung verschiebt, so entsteht eine Gerade mit einer um Eins höheren Dimension.

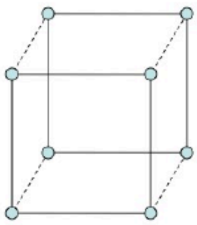
2. Die Gerade (Dimension Eins) kann man durch verschieben in eine andere Richtung (im Idealfall orthogonal zur ersten Verschiebung) in eine Fläche verwandeln.

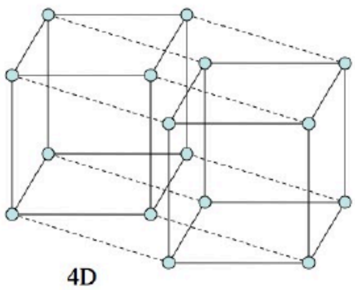
3. Die Fläche (Dimension Zwei) kann man durch verschieben in eine wieder andere Richtung (im Idealfall orthogonal zu den ersten beiden Verschiebung) in einen Körper verwandeln. Dies ist bereits nur noch als 2D-Projektion darstellbar, wir benutzen zur Veranschaulichung eine schräge Verschiebung nach oben rechts. Dies soll die dritte Dimension darstellen. Die Orthogonalität dieser dritten Verschiebung ist in der Projektion bereits nicht mehr darstellbar, die eigentlich quadratischen Seitenflächen sieht man teilweise nur verzerrt als Parallelogramme. Durch die Erfahrung mit Schrägbildern kann man sie sich aber noch gut vorstellen.

4. Nun muss der Körper (Dimension Drei) einfach ein weiteres mal in eine noch nicht benutzte Richtung verschoben werden, um die vierte Dimension zu erreichen. Damit erreicht man aber das Ende der räumlichen Vorstellung, da bereits alle drei räumlichen Dimensionen genutzt wurden. Diese vierte Dimension kann man sich also nicht mehr im Raum vorstellen. Allerdings haben wir bereits beim Körper die dritte Dimension als Schrägverschiebung nach oben rechts veranschaulicht. Analog stellen wir die vierte Dimension durch eine schräge Verschiebung nach unten rechts dar. Auch hier können wir natürlich lediglich eine 2D-Projektion zeichnen. Die bei dieser Verschiebung entstehenden 8 Würfel sind in der Projektion nicht sofort alle zu erkennen, da sie ineinander verschachtelt und teilweise verzerrt dargestellt sind. Dies entspricht der ebenfalls verzerrten Darstellung der eigentlich quadratischen Seitenflächen eines 3D-Würfels, wenn man diesen als 2D-Schrägbild zeichnet.


1D


2D


3D


4D

Zusätzlich kann man die Anzahl an Ecken, Kanten, Flächen und Körpern pro Dimension ebenfalls rekursiv folgern:

Petra Presun, Alexander Schöning · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

Dimension	Punkte	Strecken	Quadrate	Würfel	4d-Hyper-Würfel
0	1				
1	2	1			
2	4	4	1		
3	8	12	6	1	
4	16	32	24	8	1

Jede Zahl (abgesehen von der jeweils anfänglichen Eins) entsteht aus einer Verdopplung der Zahl der vorherigen Dimension plus der Zahl „oben links“ der vorherigen Dimension.

Zugang mit analytischer Geometrie

Eine Möglichkeit der Herangehensweise ist mit Hilfe analytischer Geometrie. Dazu überlegen wir uns zunächst, wo die Eckpunkte des Tesseract liegen. Auch hier hilft ein Blick in die zwei- bzw. dreidimensionale Welt. Wenn wir den Koordinatenursprung in die Mitte des Würfels legen und die Kantenlänge 2 annehmen, dann sind die Eckpunkte der entsprechenden „Würfel” gerade immer Kombinationen aus 1 und -1. Da jeder Eckpunkt des Tesseract 4 Koordinaten besitzt, erhalten wir die $2^4 = 16$ Eckpunkte:

$$\begin{array}{cccc}
P_1(1|1|1|1) & P_2(1|1|1|-1) & P_3(1|1|-1|-1) & P_4(1|1|-1|1) \\
P_5(1|-1|-1|1) & P_6(1|-1|-1|-1) & P_7(1|-1|1|-1) & P_8(1|-1|1|1) \\
P_9(-1|1|1|1) & P_{10}(-1|1|1|-1) & P_{11}(-1|1|-1|-1) & P_{12}(-1|1|-1|1) \\
P_{13}(-1|-1|-1|1) & P_{14}(-1|-1|-1|-1) & P_{15}(-1|-1|1|-1) & P_{16}(-1|-1|1|1)
\end{array}$$

Die angegebenen Eckpunkte liegen dabei immer genau nebeneinander. Eine Zeichnung kann dabei so aussehen:

Beachte, dass die x-Koordinate in der Zeichnung gerade die Koordinate ist, welche aus dem dreidimensionalen Raum heraus zeigt. Die vierte Koordinate wollen wir in Zukunft die w-Koordinate nennen.

Petra Presun, Alexander Schöning • mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

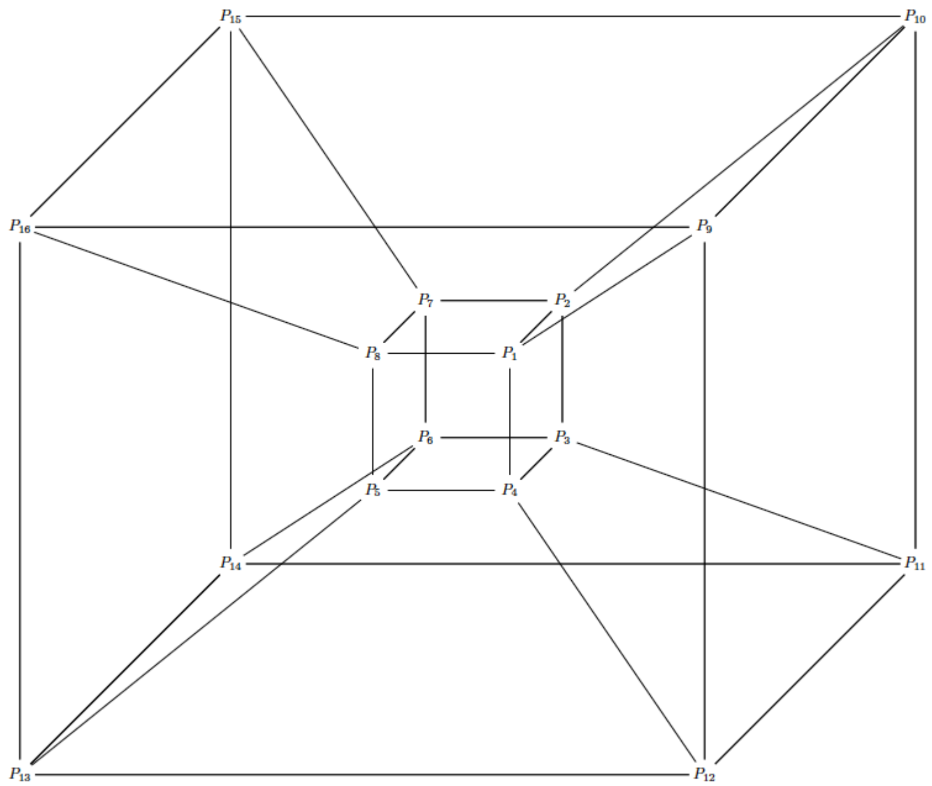
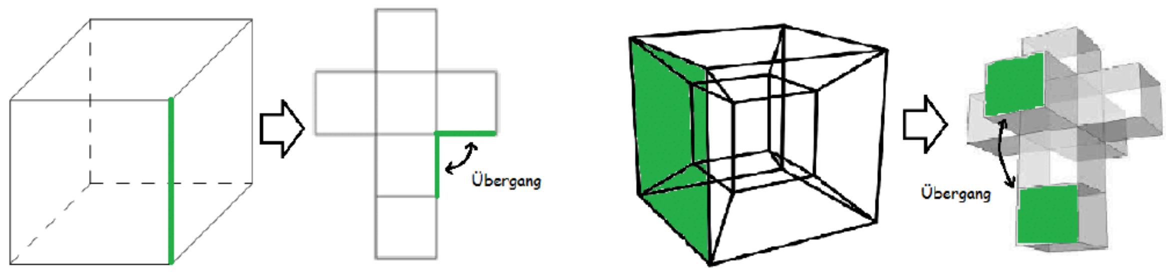


Abbildung 1: Projektion des Tesseract in 2D mit Dank an Yury Chebiryak für die Vorlage

Zu Aufgabe 4

0.0.1 Zugang über Netze

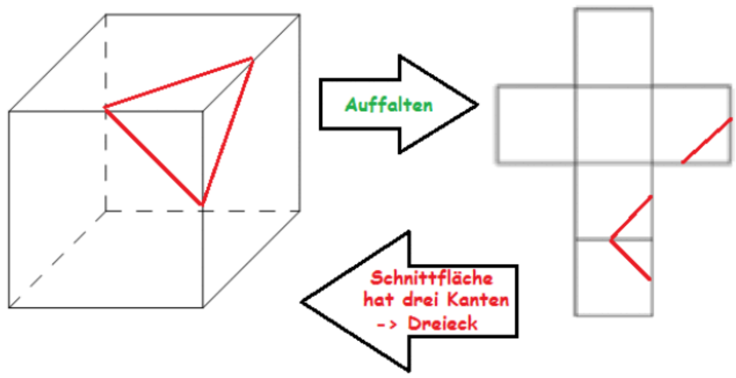
Die Auffaltung eines Würfels in sein Körpernetz ergibt eine Fläche. Auf dieser kann man gewisse Übergänge von einer Kante zu einer anderen rekonstruieren. Man stellt sich ein 2D-Wesen vor, welches innerhalb des Würfels (bzw. in der Vorstellung des 2D-Wesens auf seinem Körpernetz) entlangläuft. Wenn es eine Fläche über die grüne Kante verlässt, so verlässt es den Würfel nicht, sondern erscheint auf einer anderen Fläche, indem es diese über die zugehörige andere grüne Kante wieder betritt. Uns als 3D-Wesen erscheint dies logisch, da wir den Würfel nicht nur aufgefaltet wahrnehmen können, sondern auch dreidimensional. Aber auch das 2D-Wesen kann dies zwar nicht wahrnehmen, sich aber diese Übergangskanten logisch erschließen. Auf dieselbe Weise erschließen wir uns nun Übergänge in der 4. Dimension. Wir betrachten die „Auffaltung“ eines Hyperwürfels in sein 3D-Netz, welches aus insgesamt 8 Würfeln besteht. Nun können wir dort statt Übergangskanten eben Übergangsflächen finden:



Wenn man ein Objekt nun (gerade) schneiden möchte, so kann man diesen Schnitt durch niedrigdimensionalere Objekte eindeutig festlegen. Schneidet man eine Fläche, so erhält man entlang des Schnittes eine Schnittkante. Diese (gerade) Schnittkante kann man durch zwei Punkte eindeutig festlegen.

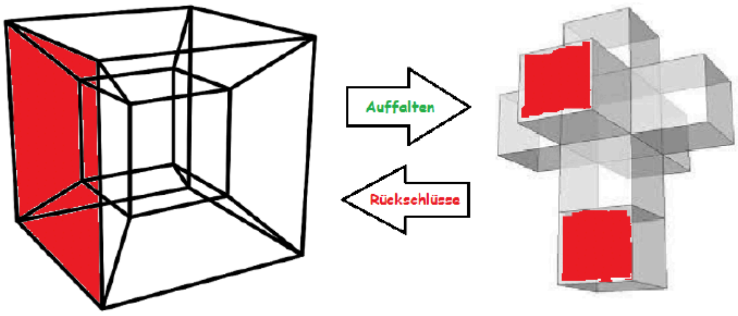
Objekt	Dimension	Art des „Schnittes“
Punkt	0	nicht möglich
Gerade	1	Punkt
Fläche	2	Gerade, festgelegt durch Punkte
Körper	3	Fläche, festgelegt durch Geraden
4D-Objekt	4	Körper, festgelegt durch Flächen

Wenn ich einen Körper schneide, so entsteht dadurch eine Schnittfläche, welche durch Schnittkanten eindeutig festgelegt werden kann. Diese Schnittkanten kann man in die Auffaltung einzeichnen, und daraus Rückschlüsse über die Form der Schnittfläche ziehen:

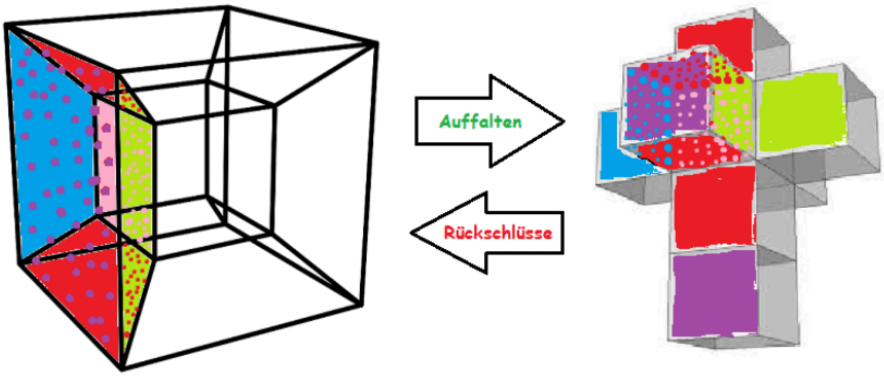


Analog dazu versuchen wir, den entstehenden Schnittkörper darzustellen, wenn wir einen Hyperwürfel schneiden. Zunächst zeichnet man die Flächen ein, die beim Schnitt entstehen. Aus diesen Flächen folgert man die Art des entstandenen Schnittkörpers.

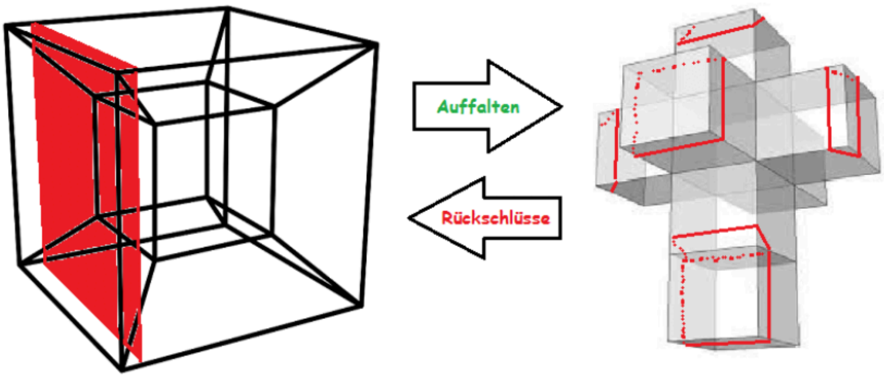
Zunächst ein einfacher Versuch: Wir schneiden genau an der Außenwand des Hyperwürfels entlang, ohne etwas abzutrennen. Dabei darf also eiegntlich kein Schnittkörper entstehen, weil wir ja nichts durchschnitten haben. Man erkennt, dass wir zwei Schnittflächen bekommen - daraus kann kein Körper entstehen, womit unsere Vermutung bestätigt ist.



Als zweiten Versuch, wollen wir genau einen der 8 Würfel komplett aus dem Hyperwürfel herausschneiden. Wir müssten also 6 quadratische Schnittflächen erzeugen. Die Schnitte sind in verschiedenen Farben eingezeichnet, nur die obere und untere Schnittflächen wurden beide rot eingezeichnet. In der Auffaltung sehen wir 11 quadratische Schnittflächen, wobei abgesehen von der rosa Schnittfläche jede andere doppelt vorkommt. Dies liegt an der vorher erwähnten „Übergangsflächen". Demnach haben wir also insgesamt 6 quadratische Schnittflächen, aus denen man einen Würfel konstruieren kann.



Als dritten Versuch verschieben wir den Schnitt aus Versuch Eins etwas nach hinten, so dass wir nun durch den Hyperwürfel schneiden. Zur besseren Übersicht wurden hier nur die Kanten der Schnittflächen in die Auffaltung gezeichnet. Dabei entsteht am vorderen und untersten Würfel je ein Quadrat als Schnittfläche. Bei den vier anderen geschnittenen Würfeln (links, rechts, oben, und der unten an den Zentralwürfel angrenzende) entsteht je ein Rechteck als Schnittfläche. Der hintere und der zentrale Würfel werden gar nicht geschnitten. Da keine der Schnittflächen eine Übergangsfläche in eine andere darstellt, besteht unser entstehender Schnittkörper also aus 2 Quadraten und 4 Rechtecken – er ist ein Quader.



Zugang mit analytischer Geometrie

Für die folgenden Überlegungen werden wir den Blick noch einmal zurück zu unserer Beschreibung des Tesseract durch die Koordinaten seiner Eckpunkte P_1 bis P_{16}. Mit der oben gemachten Festlegung der Koordinaten gilt insbesondere, dass der Tesseract unseren dreidimensionalen Raum genau dort schneidet, wo die x-Koordinate 0 ist. Dies passiert gerade bei den Kanten

$$\overline{P_1P_9},\quad \overline{P_2P_{10}},\quad \overline{P_3P_{11}},\quad \overline{P_4P_{12}},\quad \overline{P_5P_{13}},\quad \overline{P_6P_{14}},\quad \overline{P_7P_{15}},\text{ und } \overline{P_8P_{16}}.$$

Wir erhalten als Eckpunkte des Schnittkörpers gerade die Punkte

$$W_1(0|1|1|1),\quad W_2(0|1|1|-1),\quad W_3(0|1|-1|-1),\quad W_4(0|1|-1|1)$$

und

$$W_5(0|-1|-1|1),\quad W_6(0|-1|-1|-1),\quad W_7(0|-1|1|-1),\quad W_8(0|-1|1|1).$$

Im Bild sieht das folgendermaßen aus:

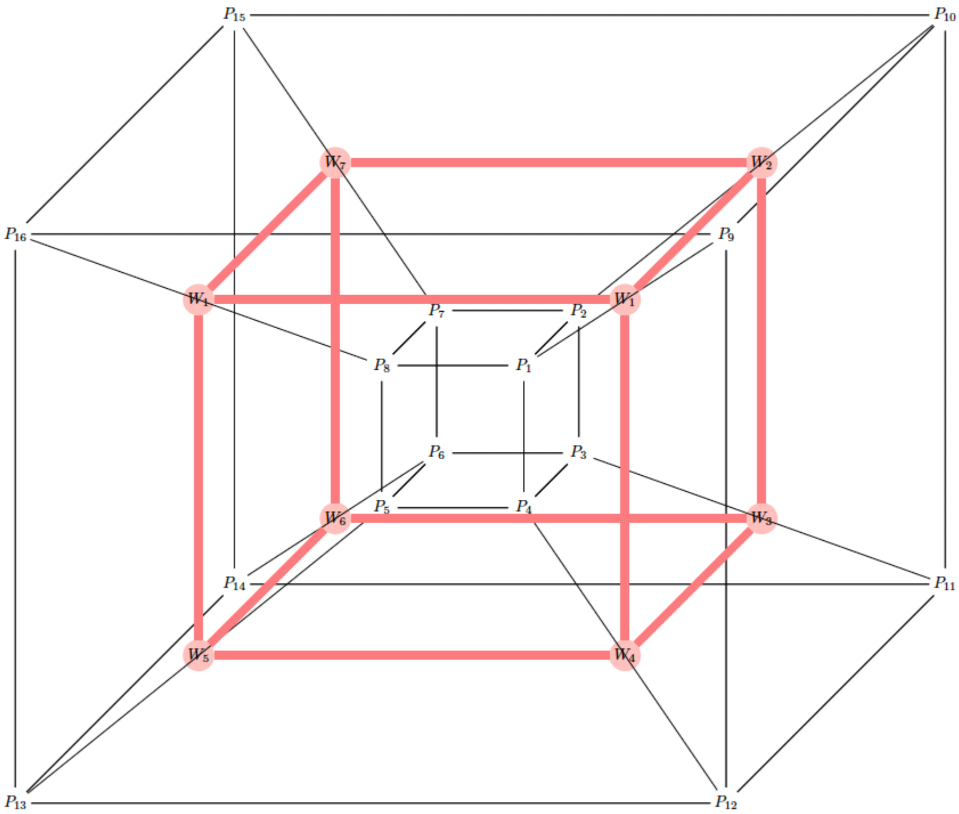
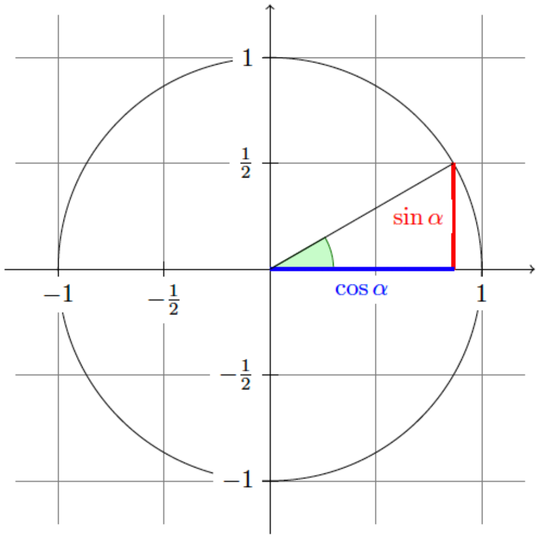


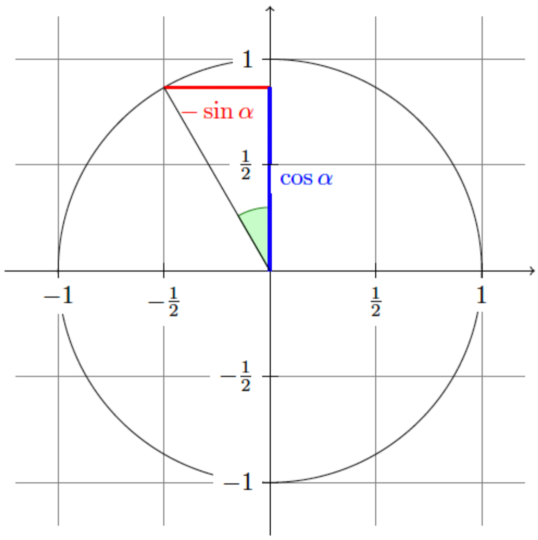
Abbildung 2: Projektion des Tesseract mit Schnittwürfel (rote Linie)

Damit ist der Schnittkörper bei geradem Schnitt des Tesseract mit unserem euklidischen dreidimensionalen Raum ein Würfel.

Als nächsten Schritt werden wir den Tesseract um drehen und dabei untersuchen, welche Schnittkörper jeweils entstehen. Dabei müssen wir beachten, dass wir jeweils um Ebenen drehen. Wie im zwei- und dreidimensionalen Fall können wir eine solche Drehung analytisch durch die Multiplikation mit einer Drehmatrix erzeugen. Wir erinnern uns daher zunächst daran, dass im zweidimensionalen Fall um einen Punkt gedreht wird. Wir beschränken uns dabei auf Drehungen um den Koordinatenursprung. Betrachten wir dazu das folgende Bild.[1]



Wie man sehen kann, wird der Punkt $(1|0)$ durch Drehung um den Winkel α in den Punkt $(\cos\alpha|\sin\alpha)$ überführt. Wiederum betrachten wir folgendes Bild.



Man kann hier sehen, dass der Punkt $(0|1)$ durch Drehung um den Winkel α in den Punkt $(-\sin\alpha|\cos\alpha)$ überführt wird. Damit haben wir die Drehung der Einheitsnormalenvektoren beschrieben. Jede Drehung eines beliebigen Punktes ist dann eine Drehung der entsprechenden Normalenvektoren. Allgemein ergibt

[1] Dies ist die Darstellung eines Winkels, wie sie in der Dokumentation des Pakets TikZ vorkommt, welches von Till Tantau geschrieben wurde.

sich für einen Punkt $P(x|y)$, dass bei Drehung um den Winkel α der Punkt $P'(x'|y')$ mit

$$x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha$$
$$y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$$

entsteht. Die entspreche Rotationsmatrix ist dann

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Für die höheren Dimensionen müssen wir uns bei Drehungen lediglich überlegen, welche zwei Richtungsvektoren wir rotieren lassen wollen. Die andere Richtung lassen wir unverändert. Im dreidimensionalen Fall haben wir 3 Richtungen und somit $\binom{3}{2} = 3$ verschiedene Drehrichtungen, welche durch die Matrizen R_x (Drehung um die x-Achse), R_y (Drehung um die y-Achse), R_z (Drehung um die z-Achse) mit

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad R_y = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad R_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Das veränderte Vorzeichen bei R_y ergibt sich, wenn wir auch bei der Drehung um die $y-$Achse den positiven Drehsinn beibehalten wollen.

Im vierdimensionalen Fall haben wir vier unabhängige Richtungsvektoren und somit $\binom{4}{2} = 6$ verschiedene Drehrichtungen, welche durch die Matrizen R_{ij} (Drehung, um die ij-Ebene mit $i, j \in \{x, y, z, w\}$) mit

$$R_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad R_{xz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$R_{xw} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_{yz} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$R_{yw} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_{zw} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Jetzt können wir die Eckpunkte des Tesseract mit Hilfe dieser Drehmatrizen drehen. Auf Grund der Konstruktion überführt jede Drehung um $\frac{\pi}{2}$ den Tesseract wieder in sich selbst. Weshalb uns nur Drehungen im Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$ interessieren. Drehen wir beispielsweise mit dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ um die xy-Ebene, so lauten die neuen Eckpunkte des Tesseract:

$$\begin{array}{cccc} P'_1(1|1|0|\sqrt{2}) & P'_2(1|1|\sqrt{2}|0) & P'_3(1|1|0|-\sqrt{2}) & P'_4(1|1|-\sqrt{2}|0) \\ P'_5(1|-1|-\sqrt{2}|0) & P'_6(1|-1|0|-\sqrt{2}) & P'_7(1|-1|\sqrt{2}|0) & P'_8(1|-1|0|\sqrt{2}) \\ P'_9(-1|1|0|\sqrt{2}) & P'_{10}(-1|1|\sqrt{2}|0) & P'_{11}(-1|1|0|-\sqrt{2}) & P'_{12}(-1|1|-\sqrt{2}|0) \\ P'_{13}(-1|-1|-\sqrt{2}|0) & P'_{14}(-1|-1|0|-\sqrt{2}) & P'_{15}(-1|-1|\sqrt{2}|0) & P'_{16}(-1|-1|0|\sqrt{2}) \end{array}$$

Da sich bei Drehung um die xy-Ebene die x-Koordinaten nicht verändern, ergeben sich unsere Schnittpunkte S_i mit unserem dreidimensionalen Raum auf den gleichen Kanten wie im ersten Fall. Wir erhalten

$$S_1(0|1|0|\sqrt{2}), \quad S_2(0|1|\sqrt{2}|0), \quad S_3(0|1|0|-\sqrt{2}), \quad S_4(0|1|-\sqrt{2}|0)$$

und

$$S_5(0|-1|-\sqrt{2}|0),\quad S_6(0|-1|0|-\sqrt{2}),\quad S_7(0|-1|\sqrt{2}|0),\quad S_8(0|-1|0|\sqrt{2}).$$

Die zweidimesionale Projektion unseres Schnittkörpers sieht dann so aus wie in Abbildung 3.

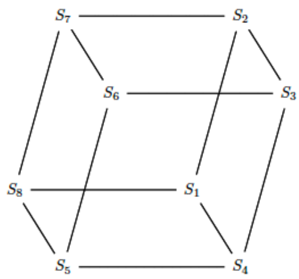


Abbildung 3: Projektion des Schnittkörpers nach Drehung des Tesseract mit dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ um die xy-Ebene

Das Ergebnis erscheint als ein sogenannter Rhomboeder, also ein Körper, welcher ausschließlich von Rhomben (in Hamburg besser Rauten) begrenzt wird. Zum Nachweis müsste überprüft werden, ob alle Seitenlängen gleich lang sind. Dies überlassen wir hier als Übungsaufgabe.

Wenn wir einmal den Winkel zwischen zwei Kanten untersuchen, so machen wir eine interessante Entdeckung. Nehmen wir einmal die Kanten $\overline{S_2S_1}$ und $\overline{S_2S_3}$. Die Richtungsvektoren sind

$$\vec{S_2S_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{S_2S_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Das Skalarprodukt $\vec{S_2S_1} \circ \vec{S_2S_3}$ wird dann zu 0, womit die Kanten senkrecht aufeinander stehen. Somit sind mindestens die Seitenflächen links und rechts Quadrate. Betrachten wir nun die Kanten $\overline{S_1S_4}$ und $\overline{S_1S_8}$. Die Richtungsvektoren sind

$$\vec{S_1S_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{S_1S_8} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wieder wird das Skalarprodukt 0 und so sind die Seitenflächen oben und unten Quadrate. Betrachten wir zuletzt die Kanten $\overline{S_3S_4}$ und $\overline{S_3S_6}$. Die Richtungsvektoren sind

$$\vec{S_3S_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{S_3S_6} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Auch hier verschwindet das Skalarprodukt. Wir haben es somit insbesondere wieder mit einem Würfel zu tun und lediglich die projizierte Anschauung ließ uns kurz auf den Gedanken kommen, hier wäre ein Rhomboeder ohne rechte Winkel entstanden. Auf Grund der Symmetrie werden alle Drehungen um die xy-Ebene als Schnittkörper Würfel erzeugen. Dies gilt auf Grund unseres komplett symmetrischen Tesseracts auch für Drehungen um die xz- oder xw-Ebene.

Schauen wir uns einmal eine Drehung um die yw-Ebene an. Wir drehen mit dem Winkel $\frac{\pi}{6}$ und erhalten die neuen Eckpunkte:

$$
\begin{array}{ll}
P_1'\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\middle|1\middle|\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\middle|1\right) & P_2'\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\middle|1\middle|\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\middle|-1\right) \\
P_3'\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\middle|1\middle|-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\middle|-1\right) & P_4'\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\middle|1\middle|-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\middle|1\right) \\
P_5'\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\middle|-1\middle|-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\middle|1\right) & P_6'\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\middle|-1\middle|-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\middle|-1\right) \\
P_7'\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\middle|-1\middle|\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\middle|-1\right) & P_8'\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\middle|-1\middle|\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\middle|1\right) \\
P_9'\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\middle|1\middle|\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\middle|1\right) & P_{10}'\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\middle|1\middle|\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\middle|-1\right) \\
P_{11}'\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\middle|1\middle|-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\middle|-1\right) & P_{12}'\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\middle|1\middle|-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\middle|1\right) \\
P_{13}'\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\middle|-1\middle|-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\middle|1\right) & P_{14}'\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\middle|-1\middle|-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\middle|-1\right) \\
P_{15}'\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\middle|-1\middle|\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\middle|-1\right) & P_{16}'\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\middle|-1\middle|\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\middle|1\right)
\end{array}
$$

Wie man sehen kann erhalten wir die Eckpunkte des Schnittkörpers wieder auf den Kanten

$$\overline{P_1'P_9'},\quad \overline{P_2'P_{10}'},\quad \overline{P_3'P_{11}'},\quad \overline{P_4'P_{12}'},\quad \overline{P_5'P_{13}'},\quad \overline{P_6'P_{14}'},\quad \overline{P_7'P_{15}'},\text{ und } \overline{P_8'P_{16}'}.$$

Der Richtungsvektor $\vec{v}$ für alle diese Kanten ist

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um auszurechnen, an welcher Stelle x 0 wird, müssen wir die Gleichungen

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) - t_1\sqrt{3} = 0$$
$$\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) - t_2\sqrt{3} = 0$$

lösen. Die erste Gleichung hilft für die ersten und letzten beiden Kanten und die zweite für die dritte bis sechste Kante. Wir erhalten

$$t_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{und} \quad t_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

und damit für die jeweiligen z-Koordinaten

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} z_2 &= -\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Die Eckpunkte des Schnittkörpers im dreidimensionalen Raum sind dann

$$S_1(0|1|z_1|1),\quad S_2(0|1|z_1|-1),\quad S_3(0|1|z_2|-1),\quad S_4(0|1|z_2|1)$$

und

$$S_5(0|-1|z_2|1),\quad S_6(0|-1|z_2|-1),\quad S_7(0|-1|z_1|-1),\quad S_8(0|-1|z_1|1).$$

Die Projektion wird in Abbildung 4 dargestellt.

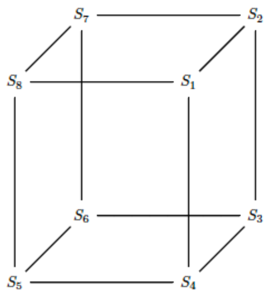


Abbildung 4: Projektion des Schnittkörpers nach Drehung des Tesseract mit dem Winkel $\frac{\pi}{6}$ um die yw-Ebene

Man kann nachrechnen, dass es sich hierbei um einen Quader handelt, der tatsächlich kein Würfel ist.

Betrachten wir für den selben gedrehten Tesseract, dass wir nicht mit dem Raum $x = 0$, sondern mit $x = \frac{1}{2}$ schneiden, so haben wir die Eckpunkte des Schnittkörpers auf

$$\overline{P_1'P_4'},\quad \overline{P_2'P_3'},\quad \overline{P_6'P_7'},\quad \overline{P_5'P_8'},\quad \overline{P_3'P_{11}'},\quad \overline{P_4'P_{12}'},\quad \overline{P_5'P_{13}'},\quad \text{und}\quad \overline{P_6'P_{14}'}.$$

Die Eckpunkte des Schnittkörpers im dreidimensionalen Raum sind dann

$$S_1(0,5|1|z_3|1),\quad S_2(0,5|1|z_3|-1),\quad S_3(0,5|-1|z_3|-1),\quad S_4(0,5|-1|z_3|1)$$

und

$$S_5(0,5|1|-0,5|-1),\quad S_6(0,5|1|-0,5|1),\quad S_7(0,5|-1|-0,5|1),\quad S_8(0,5|-1|-0,5|-1),$$

wobei

$$z_3 = \frac{1}{2}(4-\sqrt{3}).$$

Die Projektion wird in Abbildung 5 dargestellt. Hier wäre noch nachzurechnen, dass es sich unserer Anschauung entsprechend um ein trapezförmiges Prisma handelt.

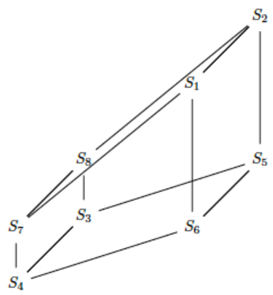


Abbildung 5: Projektion des Schnittkörpers nach Drehung des Tesseract mit dem Winkel $\frac{\pi}{6}$ um die yw-Ebene

Als Nächstes wollen wir noch den Fall betrachten, dass der Tesseract um drei Ebenen gedreht wird. Dabei werden werden wir jeweils mit dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ um die xy-, dann um die yw- und zuletzt um die zw-Ebene drehen. Die neuen Eckpunkte des gedrehten Tesseract sind dann (auf drei Stellen nach dem Komma gerundet):

$$\begin{array}{cc}
P'_1(-0,207|1,207|0,707|1,414) & P'_2(-0,914|0,5|1,707|0) \\
P'_3(-0,207|1,207|0,707|-1,414) & P'_4(0,5|1,914|-0,293|0) \\
P'_5(1,914|0,5|-0,293|0) & P'_6(1,207|-0,207|0,707|-1,414) \\
P'_7(0,5|-0,914|1,707|0) & P'_8(1,207|-0,207|0,707|1,414) \\
P'_9(-1,207|0,207|-0,707|1,414) & P'_{10}(-1,914|-0,5|0,293|0) \\
P'_{11}(-1,207|0,207|-0,707|-1,414) & P'_{12}(-0,5|0,914|-1,707|0) \\
P'_{13}(0,914|-0,5|-1,707|0) & P'_{14}(0,207|-1,207|-0,707|-1,414) \\
P'_{15}(0,5|-1,914|0,293|0) & P'_{16}(0,207|-1,207|-0,707|1,414)
\end{array}$$

Diesen gedrehten Tesseract wollen wir nun mit dem Raum $x = 1,5$ schneiden. Beim Untersuchen der Eckpunkte stellen wir fest, dass P'_5 auf der einen und alle anderen Eckpunkte auf der anderen Seite des Raumes liegen. Damit liegen die vier Schnittpunkte auf den Kanten

$$\overline{P'_5P'_4}, \quad \overline{P'_5P'_6}, \quad \overline{P'_5P'_8} \quad \text{und} \quad \overline{P'_5P'_{13}}.$$

Diese haben die Koordinaten

$$S_1(1,5|0,914|-0,293|0), \qquad S_2(1,5|0,086|-0,207|-0,293)$$

sowie

$$S_3(1,5|0,086|-0,207|0,293) \quad \text{und} \quad S_4(1,5|0,914|-1,585|0).$$

Die Projektion sieht dann aus wie in Abbildung 6

Eine Übungsaufgabe wäre es jetzt, ob die Kanten alle gleich lang sind, es sich also tatsächlich um einen Tetraeder handelt, oder lediglich um eine schiefe dreiseitige Pyramide.

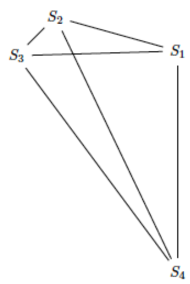


Abbildung 6: Projektion des Schnittkörpers nach Drehung des Tesseract mit dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ um die xy-, dann um die yw- und zuletzt um die zw-Ebene