# Mathematikzirkel

## Problem des Monats · Juni 2020 · Lösung

**Natürliche Zahlen**

Das Rätsel für die Mädchen führt nach einigem Herumprobieren zu vielen interessanten Teilfragen:

- Geht das für alle geraden Zahlen?
- Für alle ungeraden?
- Nur für endlich viele Zahlen?
- Gibt es unendlich viele Zahlen, für die es nicht geht?
- Klappt die Zerlegung, wenn man drei oder notfalls vier „Summanden“ zulässt?

Lösung:

Amelie, Berivan und Celina haben alle recht.

Lösungsansatz:

Alle ungeraden Zahlen $n$ sind Differenz von zwei Quadratzahlen (das ist zu beweisen).

Daraus folgt die Aussage von Berivan durch „plus 1“.

Celinas Aussage stimmt ebenfalls. So existiert beispielsweise für alle durch 4 teilbaren Zahlen $n$ die gewünschte Zerlegung. Bei dieser Argumentation muss man eine Fallunterscheidung nach „$n$ modulo 8“ machen.

Da die Differenz aufeinanderfolgender Quadratzahlen 1, 3, 5 oder 7 ist, sind die Fälle $n$ mod 8 = 0, 1, 3, 4, 5, 7 erledigt. Nun sind noch Zahlen $n$ mit $n$ mod 8 = 2, 4 oder 6 zu klären. Die Differenz $(n + 2)^2 - n^2$ ist durch 4 teilbar und damit ist auch der Fall $n$ mod 8 = 4 erledigt. Für $n$ mod 8 = 6 (d. h. 6, 14, 22, 30, ...) gibt es keine Zahl, für die es funktioniert (zu beweisen). Für $n$ mod 8 = 2 gibt es Zahlen, für die es funktioniert (z. B. 2 = 1 + 1 oder 10 = 9 + 1) und Zahlen, für die es nicht geht, z. B. 42.

Petra Presun, Alexander Schöning · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe