Mathematikzirkel

Problem des Monats · November 2020 · Lösung

Das Spiel Dobble

a) Man findet schnell die Karten AB, AC und BC.
Wir stellen fest, dass es zwei Symbole je Karte gibt und jedes Symbol auf insgesamt zwei Karten vorkommt.

b) Angenommen, es gäbe mindestens vier Karten mit dem exakt gleichen Symbol. Dann gäbe es z. B. folgende Karten:

ABC		
A??	B??	C??
A??	B??	C??
A??	B??	C??

Die A-Arten müssen alle voneinander verschiedene weitere Symbole enthalten, so dass sich in der ersten Spalte die Kartensymbole wie folgt ergänzen:

ABC		
ADE	B??	C??
AFG	B??	C??
AHI	B??	C??

Damit aber die erste B-Karte mit allen weiteren A-Karten genau ein Symbol gemeinsam haben kann, müsste diese B-Karte nun 4 Symbole besitzen, z. B. BDFH. Das führt zum Widerspruch, die Annahme, es gäbe vier A-Karten ist somit falsch.

Wenn man nun das Schema um eine A-, B- und C-Karte erleichtert und etwas ausprobiert, erhält man bespielweise die nachfolgenden Symbolkombinationen für 6 weitere Karten:

ABC		
ADE	BDG	CDF
AFG	BEF	CEG

Man stellt hier fest, dass jedes Symbol auf genau drei Karten vorkommt und auf jeder Karte drei Symbole abgebildet sind.

Anmerkung: Hier fällt bereits auf, dass die Rollen aller Buchstaben untereinander vertauschbar sind. So lässt sich z. B. B gegen C tauschen und es entsteht ein neues Kartenset, in dem andere Symbolkombinationen auftauchen als zuvor. Das Problem, wie viele weitere Kartensets erzeugt werden können, sei hier als weiterführende Fragestellung genannt.

Petra Presun, Alexander Schöning · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

Mathematikzirkel

c) Angenommen, es gibt k verschiedene Symbole pro Karte, dann können wir wieder eine Tabelle mit möglichen Kartensymbolen erstellen:

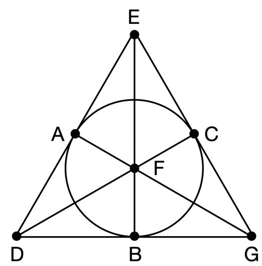
$k-1$

AB…K				
A?...?	B?...?	(*)	…	K?...?
A?...?	B?...?		…	K?...?
…	…		…	…
A?...?	B?...?		…	K?...?

k

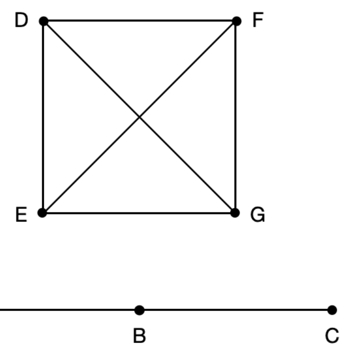
Für die erste B-Karte (s.o. *) gilt nun wie in b), dass noch $k-1$ Symbole frei wählbar sind. Jeweils eines dieser Symbole muss mit einer der **A-Karten** übereinstimmen. Damit kann es maximal k A-Karten geben: Die Kombination AB ist in der ersten A-Karte schon verwendet worden, und alle weiteren A-Karten haben nun mit der ersten B-Karte (*) genau ein Symbol gemeinsam. Diese B-Karte hat aber nur noch $k-1$ weitere mögliche Symbole außer B. Es kann deshalb nur ***k* – *1* weitere A-Karten** geben, die aber nicht die Symbole B-K enthalten dürfen.
Diese Argumentation ist analog auch für die B-Karten usw. zu führen. Damit kann es maximal
$k \cdot (k-1) + 1$ Spielkarten im Spiel geben.
Unklar ist noch, ob diese Anzahl auch maximal ausgeschöpft werden kann/muss.

d) Als Figur ergibt sich die Fano-Ebene. Hier muss künstlich ein Kreis eingefügt werden, damit alle sieben Spielkarten durch jeweils eine Gerade symbolisiert werden. Die Beschriftung kann natürlich abweichen.



Es gilt damit folgende Analogie
Punkt – Symbol
Gerade – Spielkarte
Ebene – Kartenspiel

Alternativ lässt sich auch die quadratische Form der Fano-Ebene erzeugen. Das Quadrat allein ist die endliche affine Ebene der Ordnung 2. Dabei schneiden sich die gleichfarbigen Geraden jeweils im gleich gefärbten Fernpunkt. Es benötigt also noch drei Fernpunkte und eine zusätzliche Ferngerade. (Oben war das der Kreis – in der projektiven Geometrie nennt man dies den „projektiven Abschluss, in unserem Beispiel entsteht dann die endliche Projektive Ebene der Ordnung 2.) Hier kann man sich vorstellen, dass sich Geradenpaare mit „gleichem Anstieg" in einem Fernpunkt treffen. Die Darstellung rechts wurde so beschriftet wie oben die Symbolkombinationen gewählt wurden.



Petra Presun, Alexander Schöning · mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe

Dies wiederum führt zu einer weiteren möglichen Notation der projektiven Ebenen n-ter Ordnung, hier am Beispiel $n = 2$:

<table>
<tr><td colspan="3">D</td><td colspan="3">F</td></tr>
<tr><td colspan="3">E</td><td colspan="3">G</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">A</td><td colspan="2">B</td><td colspan="2">C</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Man notiert in tabellarischer Form die Fernpunkte ganz unten und dazu die jeweiligen „Anstiege“. B wird also auf den Geraden liegen, die im darüber liegenden Tableau durch Ablaufen der Tabelle mittels „eins nach rechts, eins nach oben“ erreicht werden. Wenn man die Tabelle verlässt, beginnt man auf der gegenüberliegenden Seite. Damit muss B mit E und F eine Gerade gemeinsam haben, aber eben auch B mit G und (Tabelle auf anderer Seite wieder betreten) D.

Auf diese Weise kann nun einfacher und effektiver nach möglichen Kartensets bzw. projektiven Ebenen geforscht werden.

e) Diese Aufgabe ist umfangreich und durchaus zeitraubend. Beispielhaft sei hier das folgende Quadrat als Anordnung mit insgesamt 57 Symbolen genannt:

<table>
<tr><td colspan="3">Schloss</td><td colspan="3">Hand</td><td colspan="3">Netz</td><td colspan="3">S.mann</td><td colspan="3">Bombe</td><td colspan="3">Apfel</td><td colspan="3">Baum</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3">Notens.</td><td colspan="3">Brille</td><td colspan="3">Drache</td><td colspan="3">Käse</td><td colspan="3">Dino</td><td colspan="3">Tot</td><td colspan="3">Mond</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3">Ausruf</td><td colspan="3">Zebra</td><td colspan="3">Kerze</td><td colspan="3">Delfin</td><td colspan="3">Pferd</td><td colspan="3">Kaktus</td><td colspan="3">Verkehr</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3">Mund</td><td colspan="3">Schere</td><td colspan="3">Marien</td><td colspan="3">Flasche</td><td colspan="3">Faden</td><td colspan="3">Möhre</td><td colspan="3">Mann</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3">Blume</td><td colspan="3">Schildk.</td><td colspan="3">Spinne</td><td colspan="3">Fleck</td><td colspan="3">Lampe</td><td colspan="3">Herz</td><td colspan="3">Uhr</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3">Anker</td><td colspan="3">Fragez.</td><td colspan="3">Tropfen</td><td colspan="3">Iglu</td><td colspan="3">Yinyang</td><td colspan="3">Stift</td><td colspan="3">Auge</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3">Schüssel</td><td colspan="3">Hammer</td><td colspan="3">Eis</td><td colspan="3">Feuer</td><td colspan="3">Flocke</td><td colspan="3">Blitz</td><td colspan="3">Geist</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3">Auto</td><td colspan="3">Sonne</td><td colspan="3">Vogel</td><td colspan="3">Clown</td><td colspan="3">Katze</td><td colspan="3">Hund</td><td colspan="3">Blatt</td><td colspan="3">Klee</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
</table>

Hier zeigt sich auch, dass die Konstruktion gerade deshalb gelingt, weil die Ordnung 7 eine Primzahl ist und damit alle Zeilen und Spalten jeweils einmal „getroffen“ werden.

Quellen/weiterführende Links:

https://www.youtube.com/watch?v=vyYSEDGUdlg

https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/33174/1/BzMU14-4ES-Hartmann-290.pdf

Petra Presun, Alexander Schöning ・ mathezirkel.hamburg@gmail.com
http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe