Hinweis

Um der Vielfalt der Schulsysteme in den Bundesländern Rechnung zu tragen, aber auch die Mathematik-Olympiade bundesweit durchführen zu können, wurde der Begriff *Olympiadeklasse* geprägt. Die Aufgaben und Lösungen werden für die Olympiadeklassen 3 bis 12 angeboten.

Für die Bundesrunden gelten die folgenden Regeln zur Einstufung der Teilnehmer in die Olympiadeklassen 8 bis 12. Es wird empfohlen, diese Regeln in gleicher Weise für alle Olympiadeklassen der ersten 3 Runden anzuwenden.

- Für die Primarstufe und die Sekundarstufe 1 entspricht die Olympiadeklasse grundsätzlich dem laufenden Schuljahr.

- Für die Sekundarstufe 2 gibt es bundesweit unterschiedliche Bezeichnungen oder Nummerierungen der schulischen Jahrgangsstufen. In der Abiturstufe sind daher
  - die Olympiadeklasse 10 für die einjährige Einführungsphase und
  - die Olympiadeklassen 11 und 12 für die beiden Jahre der Qualifikationsphase

  vorgesehen.

- Die beiden Standard-Abläufe der Olympiadeklassen für die Primarstufe bis zum Abitur sind:
  - **G8**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10/E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

  - **G9**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10	E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**10**	**11**	**12**

- **Wichtig: Doppelstart in Olympiadeklasse 10**
  Für eine optimal abgestimmte Vergleichbarkeit zwischen den beiden Abläufen starten Schülerinnen und Schüler aus G9 sowohl in ihrem Abschlussjahr der Sekundarstufe 1 als auch im Einführungsjahr der Sekundarstufe 2 in der Olympiadeklasse 10.

- **Wichtig: Klasse 13 startet in Olympiadeklasse 12**
  Daher starten Schülerinnen und Schüler aus G9 in ihrem Abiturjahr in der Olympiadeklasse 12.

Olympiadeklassen **9–10**

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Olympiadeklassen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

611011

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, die Sterne in der Gleichung

$$**61*61*61 = (**61*)^2$$

so durch Ziffern von 0 bis 9 zu ersetzen, dass die Gleichung im Zehnersystem stimmt. Dabei können die Sterne durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.

611012

Gegeben ist die lineare Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = 3x + 7$. Aus den Werten von f werden die Werte von z mit $z = f(a) + f(a+1) + f(2a+3)$ berechnet.

Hinweis: Zum Beispiel bedeutet $f(8a-4)$, dass man $8a-4$ in das Argument von f einsetzen muss. Also $f(8a-4) = 3 \cdot (8a-4) + 7 = 24a - 5$.

a) Bestimmen Sie einen Term für z in Abhängigkeit von a, der das Symbol f nicht mehr enthält.
b) Gibt es eine natürliche Zahl a, für die $z = 10^{2021}$ gilt?
c) Gibt es eine natürliche Zahl a, für die z durch 2021 teilbar ist?
d) Gibt es eine natürliche Zahl a, für die z (im üblichen Zehnersystem) eine 2021-stellige Zahl mit 2021 gleichen Ziffern ist?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

611013

a) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen z mit der Eigenschaft, dass für alle positiven ganzen Zahlen n die Ungleichung $n \cdot z < 2021$ gilt.

b) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen z mit der Eigenschaft, dass für alle positiven ganzen Zahlen n die Ungleichung $\frac{2n+1}{3n+2} < z$ gilt.

611014

Das Viereck $ABCD$ sei ein Parallelogramm, bei dem der Abstand der parallelen Geraden AB und CD gleich 6 ist. E und F seien die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$. Die Gerade DE schneide die Strecke $\overline{BF}$ im Punkt P und die Gerade AB im Punkt Q.

a) Zeigen Sie, dass $|AQ| = 2\,|AB|$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass P auf der Geraden AC liegt und bestimmen Sie die Länge des Abstands von P zur Geraden AB.

611015

Zum Test des räumlichen Vorstellungsvermögens sind die Seitenflächen eines Würfelnetzes mit „links“, „rechts“, „oben“, „unten“, „vorn“ und „hinten“ zu beschriften. Nach dem Zusammenbau des Würfels legt man ihn auf den Tisch und untersucht die Beschriftung. Pro richtig beschrifteter Fläche gibt es einen Punkt.

Zur Bepunktung wird der Würfel natürlich so gedreht, dass es möglichst viele Punkte gibt.

Welche Punktzahlen sind möglich (und welche nicht), wenn bekannt ist, dass wirklich die sechs Worte „oben“, „unten“, „vorn“, „hinten“, „links“ und „rechts“ verwendet wurden und jedes Quadrat des Würfelnetzes genau eines dieser Worte enthält?

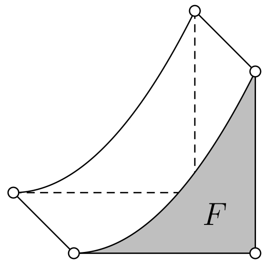
611016

Für diese Aufgabe wird das **Cavalieri’sche Prinzip** als bekannt vorausgesetzt. Es besagt für zwei Körper K_1 und K_2:

> Wenn jede zu einer gegebenen Ebene E parallele Ebene E' die Körper K_1 und K_2 in Flächen gleichen Inhalts schneidet, dann haben diese Körper das gleiche Volumen.

In einem ebenen kartesischen x-y-Koordinatensystem betrachten wir die Fläche F, die aus denjenigen Punkten $P(x, y)$ besteht, deren Koordinaten x und y die Ungleichungen $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq x^2$ erfüllen. Im Raum betrachten wir weiterhin den allgemeinen Zylinder Z mit Höhe 1 und Grundfläche F, der entsteht, wenn man F um 1 senkrecht zur x-y-Ebene verschiebt (siehe Abbildung A 611016). Außerdem ist eine gerade Pyramide K der Höhe 1 gegeben, deren Grundfläche ein Quadrat der Seitenlänge 1 ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!



A 611016

a) Zeigen Sie, dass Z und K das gleiche Volumen haben.

b) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche F.

Hinweis: Ein Nachweis der Volumengleichheit der oben beschriebenen Körper ist hier möglich, wenn man eine geeignete Lage der Körper im Raum und eine Ebene E findet, um das Cavalieri'sche Prinzip anzuwenden.

Wir verwenden in dieser Aufgabe einen **erweiterten Begriff des Zylinders**, bei dem die Grundfläche eine beliebige Fläche sein kann (Zylinder in diesem Sinn sind also nicht nur Kreiszylinder, sondern zum Beispiel auch Dreiecksprismen). Begriffe wie Grundfläche G, Deckfläche D und Höhe h als Abstand zwischen Grund- und Deckfläche werden sinngemäß verwendet. Es gilt auch hier die bekannte Volumenformel $V = G \cdot h$.