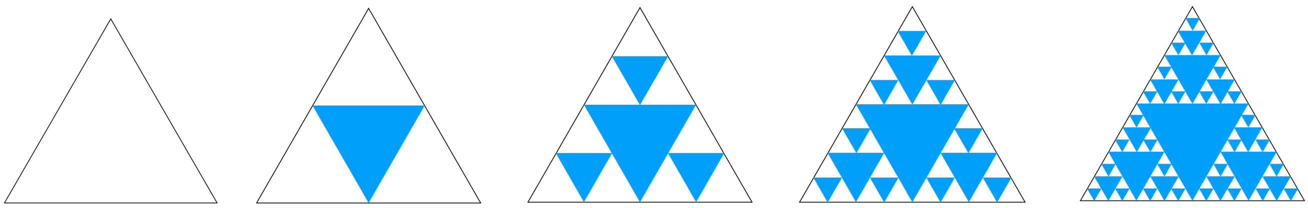
Mathematikzirkel

Problem des Monats · Februar 2021
LÖSUNG

Aufgabe 1:



Unser besonderes Dreieck wird auch als das **Sierpinski Dreieck** bezeichnet.
= Fraktal
= selbstähnliche Teilmenge eines Dreiecks
- nach polnischem Mathematiker Sierpinski benannt

(Link: https://bit.ly/3sWmkNT)

Mögliche Fragestellungen:
- Muster beschreiben, Selbstähnlichkeit definieren
- Muss das Dreieck gleichseitig sein?
- Kann der Algorithmus auch anders beschrieben werden?

Aufgabe 2a) +b) +c)

Stufen	Anzahl der ungefärbten Dreiecke	Kantenlänge (Umfang)	Ungefärbter Gesamtflächen-inhalt
0	1	6	$\sqrt{\mathbf{3}}$
1	3	9	$\frac{3}{4}\cdot\sqrt{\mathbf{3}}$
2	3^2	13,5	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\sqrt{\mathbf{3}}$
3	3^3	20,25	$\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\sqrt{\mathbf{3}}$
4	3^4	30,375	$\left(\frac{3}{4}\right)^4\cdot\sqrt{\mathbf{3}}$
n	3^n	$\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot 6$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot\sqrt{\mathbf{3}}$

Weiterführende Fragestellungen:

- Grenzwertbetrachtung des Flächeninhalts:

$$A_{Sierpinski-Dreieck} = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot\sqrt{\mathbf{3}}\right) = \mathbf{0}$$

- Grenzwertbetrachtung der Kantenlänge:

$$u_{Sierpinski-Dreieck} = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot\mathbf{6}\right) = \infty$$

Aufgabe 3) individuelle Lösungsmöglichkeiten,

z.B. Beispiel am Quadrat:

i) Teile die Seitenlängen des Quadrats in 3 gleiche Teile und verbinde die gegenüberliegenden Punkte miteinander, so dass 9 Quadrate entstehen.

ii) Färbe das Quadrat in der Mitte.

Stufe 2: Wiederhole die Schritte i) und ii) erneut bei den 8 ungefärbten Quadrate.

(Link: https://bit.ly/3ppyJrm)

Sierpinski Würfel: https://bit.ly/2Yk6luN

Sierpinski Tetraeder: https://bit.ly/2Yk9qen

Verknüpfungen zu anderen Themen/weiterführende Fragestellungen:

- Bezug zum Pascalschen Dreieck (https://bit.ly/2Y4duPL)
- Übertragung auf Sierpinski Tetraeder
- Fraktale im Allgemeinen
- Dimensionen bei Fraktalen betrachten
- Bau eines Sierpinski Modells (https://www.schroediwi.de/arcorspiegel/klaus/chaos/sierpinskischwamm.pdf)
- Programmieren des Chaosspiels (Link: https://bit.ly/3sOeRAg)
- Chaosspiel zur Erzeugung des Sierpinski Dreiecks:
    - Dieses Muster kann auch durch einen vom Zufall gesteuerten Chaosprozess gebildet werden. Startet man wieder mit dem Ausgangsdreieck ABC und wählt einen beliebigen Startpunkt P_0, entsteht ein weiterer Punkt P_1, indem auf der geraden Verbindung zu einem der Eckpunkte A, B oder C genau die Mitte markiert wird. Die Wahl des Eckpunkts ist dabei zufällig. Ausgehend vom Punkt P_1 wird der Punkt P_2 erzeugt, indem wieder zufällig eine gerade Verbindung zu einem der Eckpunkte gezogen wird und genau auf der Mitte der neue Punkt markiert wird. Somit entstehen im Laufe des Prozesses die Punkte P_0, P_1, $P_2 \ldots P_n$, die zusammen das Muster erzeugen.
      Unter folgendem Link (https://bit.ly/3sNhyCa) kannst du den Chaosprozess durch eine Animation verfolgen.
      Begründe, warum jeder Punkt P_{i+1} auf einer gefärbten Fläche liegt, sobald P_i auf einer gefärbten Fläche liegt.