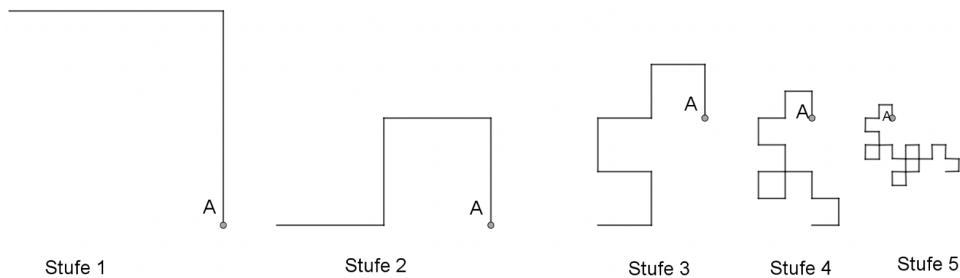


## Papierfalten und Fraktale Geometrie

Ein Hinweis vorweg: Im Band 1 der Materialien der Lehrera Akademie Bremen<sup>1</sup> wird als Grundidee der Fraktalen Geometrie beschrieben, dass sie ein Gebiet der modernen Mathematik mit der Idee ist, eine adäquate mathematische Sprache für die komplexen Strukturen und Formen der Natur zu formulieren. Die hier aufgeführten Anregungen als Einstieg in die fraktale Geometrie sind im Wesentlichen den Bänden 1 und 3<sup>2</sup> der Materialien der Lehrera Akademie entnommen.

a)



b) siehe d)

c)

Stufe 3: LLRLLRR

Stufe 4: LLRLLRLLLRLLRR

Stufe 5: LLRLLRLLLRLLRLLLRLLRLLRRLLRLLRR

Stufe 6: LLRLLRLLLRLLRLLLRLLRLLLRLLRLLLRLLRLLLRLLRLLRRLLRLLRRLLRLLRRLLRLLRR

d) Denkanstöße:

- Jeder Streifen besteht in Stufe  $n$  aus  $2^n$  Segmenten und  $2^n - 1$  Knicken.
- Wie hängt die erste Hälfte der Buchstabenfolge mit der zweiten zusammen?  
Reflexionsgesetz: Eine Folge besteht immer aus einem L in der Mitte und zwei weiteren Teilen. Der hintere Teil bildet sich so, dass er den vorderen Teil von hinten durchläuft, also quasi am mittleren L gespiegelt wird. Dabei wird jedes R zu einem L und jedes L zu einem R. Der hintere Teil wird reflektiert.
- Wie hängt z. B. die Folge aus Stufe 3 mit der Folge aus Stufe 7 zusammen?  
Translationsgesetz: Die Folge kommt achtmal vor. Das allgemeine Gesetz lautet: Die Folge  $w_k$  kommt in der Folge  $w_{k+m}$   $2^{m-1}$ -mal vor. Ergänzend kann man noch finden, dass die Folgen einen Abstand von  $2^{k+1}$  haben.

---

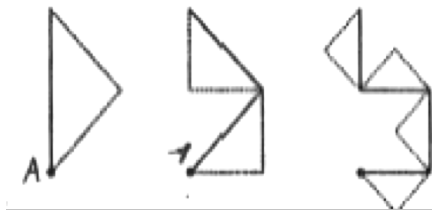
<sup>1</sup> Falten und Fraktale, Heinz-Otto Peitgen, Gencho Skordev; aus: Lehrera Akademie Bremen, Materialien Band 1, S. 1 ff.

<sup>2</sup> Papierfalten, Heinz-Otto Peitgen, Reimund Albers; aus: Lehrera Akademie Bremen, Materialien Band 3, S. 1 ff.sss



# Mathematikzirkel

e)



Mit dem Satz von Pythagoras sieht man schnell, dass für die gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke gilt:

Stufe 1	$10 \cdot \sqrt{2}$	Stufe 4	$10 \cdot (\sqrt{2})^4 = 40$
Stufe 2	$10 \cdot (\sqrt{2})^2 = 20$	Stufe 5	$10 \cdot (\sqrt{2})^5$
Stufe 3	$10 \cdot (\sqrt{2})^3$	Stufe n	$10 \cdot (\sqrt{2})^n$

Anders ausgedrückt: Betrachtet man bei jeder Struktur den Abstand vom Anfangspunkt des Streifens bis zum Endpunkt des Streifens als einen festen Abstand, kann man jede Länge eines Abschnitts mit dem Skalierungsfaktor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  berechnen. Das Grenzobjekt ist eine Figur, die nach seinem Entdecker Highway – Drache heißt (siehe Anhang).

Das führt zu einer weiteren möglichen Vertiefung (ab Klasse 10): Betrachtung von Dimensionen von fraktalen Strukturen.

Ein möglicher Dimensionsbegriff für das Grenzobjekt einer strikt selbstähnlichen Figur ist die Selbstähnlichkeits-Dimension  $d_s$  für ein Objekt X:  $d_s(x) = \frac{\log(n)}{\log(\frac{1}{s})}$ , wobei s der Faktor ist, mit dem aus

einer Figur eine selbstähnliche verkleinerte Kopie entsteht (hier:  $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ) und n die Anzahl der selbstähnlichen verkleinerten Figuren (hier:  $n = 2$ ). Die Zahl  $d_s$  beschreibt den Zusammenhang

zwischen den n selbstähnlichen Teilen des Objekts und ihrem Skalierungsfaktor s:  $n = \left(\frac{1}{s}\right)^{d_s}$ . Sie

zeigt, dass der Highway-Drache die Dimension 2 hat, also dass tatsächlich eine flächenfüllende Kurve entsteht. Untersucht man weitere fraktale Strukturen wie z. B. die Kochkurve oder das Sierpinski-Dreieck mit dieser Dimensionsdefinition, erhält man interessante Ergebnisse. So hat die Kochkurve nach dieser Definition die Dimension  $\lg 4 / \lg 3$ , also ca. 1,26. Es ist also eine Struktur, die keine Linie, aber auch keine Fläche ist. Das Sierpinski-Dreieck hat eine Selbstähnlichkeits-Dimension von  $\lg 3 / \lg 2$ , also ca. 1,58. Es ist also mehr Fläche als Linie, aber liegt auch dazwischen.



# Mathematikzirkel

## Anhang

